MATHÉMATIQUES **2e épreuve** OPTION GÉNÉRALE DURÉE : 4 heures

Il est rappelé aux candidats qu'une pénalisation d'un maximum de 2 points (sur 20) sanctionnera le manque de soin apporté à la présentation des copies (fautes d'orthographe, copie peu lisible, ...).

L'usage des instruments de calcul est autorisé.

QUESTION PRÉLIMINAIRE

Soit f la fonction définie pour tout x élément de $]0;1[$ par : $f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$, n désignant un entier supérieur ou égal à 2.

1° Déterminer les fonctions f', f'', f''' dérivées première, seconde et troisième de f.

2° En déduire une expression plus simple de $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$ pour $x \in]0;1[$.

3° Montrer que pour tout x élément de $]0;1[$ on a les relations :

$$\sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)\,x^{k-2} = \frac{2}{(1-x)^3} \qquad \sum_{k=1}^{+\infty} k(k-1)(k-2)\,x^{k-3} = \frac{6}{(1-x)^4}$$

PARTIE A

Une boîte B contient 60 boules blanches et 40 boules noires. On effectue dans cette boîte des tirages successifs d'une boule avec remise.

1° On désigne par X le nombre de tirages qu'il faut effectuer dans cette boîte pour obtenir la première boule blanche.

Déterminer la loi de probabilité de X.

Calculer son espérance mathématique et sa variance.

Tournez la page S.V.P.

2° On note Y le nombre de tirages qu'il faut effectuer dans cette boîte pour obtenir deux boules blanches.

Déterminer la loi de probabilité de Y.

Vérifier que : $\sum_{k=2}^{+\infty} P(Y=k) = 1$.

Calculer l'espérance mathématique de Y ainsi que celle de Y(Y+1). En déduire la variance de Y.

3° n désigne un entier naturel non nul.

On note A_n l'événement : « l'obtention de la première boule blanche s'est produite avant d'atteindre le n^e tirage ».

a) Déterminer la probabilité p_n de l'événement A_n.

b) Quel est le plus petit entier n_0 tel que p_{n_0} soit supérieure ou égale à 0,9 ?

4° Pour tout entier naturel non nul n on désigne par B_n l'événement : « l'obtention de la 2e boule blanche s'est produite avant d'atteindre le n^e tirage ».

a) Quelle est la probabilité p'_n de l'événement B_n ?

b) Trouver le plus petit entier n_1 tel que p'_{n_1} soit supérieure ou égale à 0,9.

5° Un joueur réalise des tirages tels que ceux définis au début de la partie A.

Au début du jeu le joueur effectue une mise de a francs ($a \in \mathbf{N}^*$) qui prend la forme d'un crédit qu'il ne récupérera en aucun cas.

Cette somme diminue de 1 franc chaque fois que le joueur effectue un tirage.

Le jeu s'arrête soit lorsque le joueur n'a plus qu'un crédit nul soit lorsqu'il tire une première boule blanche, le joueur recevant dans les deux cas le triple de la somme restante.

On désigne par Z la variable aléatoire réelle correspondant à la somme perçue par le joueur à l'issue du jeu.

a) Déterminer la loi de probabilité de Z.

b) Exprimer son espérance mathématique en fonction de a.

c) Soit φ la fonction numérique définie sur **R** par : $\varphi(x) = 3x - 5 + 2 \times 0{,}4^{x-1}$

α) Étudier le sens de variation de φ

β) En déduire la valeur de a pour laquelle $|E(Z)-25|$ est minimum.

PARTIE B On dispose dans cette partie d'une seconde boîte B′ qui contient 50 boules blanches et 50 boules noires.

1° On lance deux fois de suite un dé non truqué dont les six faces sont numérotées de 1 à 6.

Si le total des points obtenus lors des deux lancers est supérieur ou égal à 6 on tire simultanément deux boules dans la boîte B sinon on tire simultanément deux boules dans la boîte B′.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules blanches ?

b) Après avoir lancé le dé deux fois et tiré deux boules, on constate qu'elles sont toutes deux blanches.

Quelle est la probabilité qu'elles aient été tirées dans la boîte B ?

2° On lance ce même dé une seule fois.

Si le numéro obtenu est inférieur ou égal à 4 on effectue des tirages avec remise uniquement dans B sinon on effectue des tirages avec remise uniquement dans B′. (A chaque tirage on ne prend qu'une seule boule).

Tournez la page S.V.P.

a) Quelle probabilité a-t-on d'obtenir une boule blanche au premier tirage ?

b) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche au deuxième tirage sachant que l'on a obtenu une boule blanche au premier tirage ?

c) Quelle probabilité a-t-on d'obtenir une boule blanche au $n^{ième}$ tirage ($n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$) sachant que l'on a obtenu $n-1$ boules blanches aux tirages précédents ?

d) Déterminer la probabilité u_n d'avoir effectué les tirages dans B sachant que l'on a obtenu uniquement des boules blanches aux n premiers tirages.

e) Quel est le nombre minimum n_2 de tirages qu'il faut effectuer pour que $u_{n_2}\geq 0{,}9$?

PARTIE C

On considère de nouveau la seule boîte B et on désigne par V la variable aléatoire $V = Y - 2$ qui représente le nombre de boules noires tirées avant d'obtenir la deuxième boule blanche. (Y a été définie dans la partie A).

1° Déterminer la loi de probabilité de V.

Calculer son espérance mathématique et sa variance.

2° On définit un coefficient du binôme généralisé de la façon suivante : pour $x\in\mathbb{R}$ et $k\in\mathbb{N}^*$, $\binom{x}{k} = \dfrac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{k!}$

Montrer que pour tout entier strictement positif k : $(-1)^k\binom{-2}{k} = k+1$

En déduire que pour $k\in\mathbb{N}^*$: $P(V=k) = \binom{-2}{k}0{,}6^2(-0{,}4)^k$

3° Soit x un réel donné de l'intervalle $]0;1[$.

On considère la suite de terme général : $\omega_n = \displaystyle\int_0^x \frac{1-t^n}{1-t}\,dt$ pour $n\in\mathbb{N}^*$.

a) Calculer ω_n en fonction de n et de x.

b) Calculer de même : $\sigma_n = \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt$

c) Montrer que $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante et que : $\dfrac{x^{n+1}}{n+1} \leq \sigma_n \leq \dfrac{x^{n+1}}{(n+1)(1-x)}$

d) En déduire que la suite $(\sigma_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est convergente et calculer sa limite.

e) Utiliser les résultats précédents pour montrer que la série de terme général $\dfrac{x^k}{k}$ ($k\in\mathbb{N}^*$) est convergente et que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{x^k}{k} = \ln\frac{1}{1-x}$

4° Établir que : $E\left(\dfrac{1}{Y}\right) = \dfrac{p}{q} + \dfrac{p^2}{q^2}\ln p$ avec $p = 0{,}6$ et $q = 0{,}4$.

5° α désigne un nombre réel.

Déterminer toutes les suites v qui vérifient la relation de récurrence :

$v_{k+2} - 2\alpha v_{k+1} + \alpha^2 v_k = 0$ pour tout k élément de $\mathbb{N}$.

Montrer qu'il est possible de choisir α pour que l'une d'elles soit telle que :

$P(V=k) = v_k$ pour tout k élément de $\mathbb{N}$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail